UNIVERSIDAD DE EL SALVADOR
Curso de Nivelación 2014

MATEMÁTICA

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados

CURSO DE MATEMÁTICA EN LÍNEA

Contenido

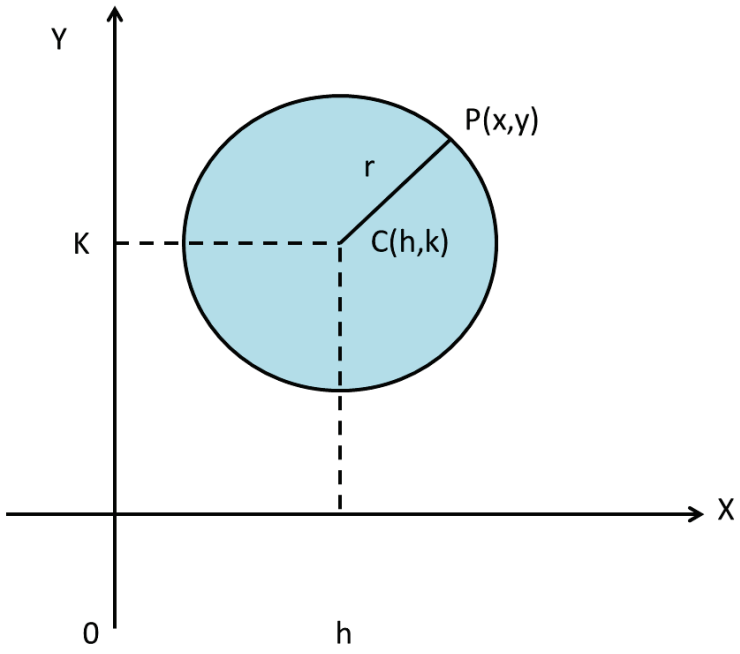
CÓNICAS 1
LA CIRCUNFERENCIA 1
Ecuación general de una circunferencia 3
LA ELIPSE 5
RELACIONES ENTRE EL SEMIEJE MAYOR, EL SEMIEJE MENOR Y LA MITAD DE LA DISTANCIA FOCAL 6
DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN ORDINARIA DE LA ELIPSE 7
LA PARÁBOLA 11
Parábolas con eje de simetría horizontal. 11
Parábolas con eje de simetría vertical 13
LA HIPÉRBOLA 15
ASINTOTAS DE LA HIPÉRBOLA 15
EXCENTRICIDAD 16
RELACIÓN ENTRE EL SEMI-EJE TRANSVERSO, EL SEMI-EJE CONJUGADO Y LA MITAD DE LA DISTANCIA FOCAL 16
DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN ORDINARIA DE UNA HIPÉRBOLA DE EJE TRANSVERSO HORIZONTAL 17
ECUACIÓN ORDINARIA DE LA HIPÉRBOLA DE EJE TRANSVERSO VERTICAL 19
GEOMETRÍA ANALÍTICA 21
DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS 21
DISTANCIA DIRIGIDA 22
PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO DE RECTA 22
PLANO CARTESIANO 23
FORMULA DE LA DISTANCIA 24
PUNTO MEDIO 25
RECTAS EN EL PLANO 26
PEDIENTE DE UNA RECTA 26
ECUACIONES DE RECTAS 28

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

CÓNICAS

LA CIRCUNFERENCIA

"Una circunferencia es el conjunto de todos los puntos del plano que equidistan (igual distancia) de un punto fijo. El punto fijo es el centro de la circunferencia, y la distancia entre el centro y un punto de la circunferencia es su radio"



c: centro

r: Radio

p: Punto de la circunferencia

$\left|\overline{CP}\right| = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$, pero $\left|\overline{CP}\right| = r$, $\therefore$

$r = \sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2}$

$r^2 = (x-h)^2 + (y-k)^2 \rightarrow$ Ecuación ordinaria de la circunferencia

$(h,k) \rightarrow$ Coordenadas del centro.

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

Ejemplo:

1) Dada la ecuación de la circunferencia: $(x+3)^2+(y-4)^2=25$, calcule las coordenadas del centro y la longitud de su radio.

Solución:

Se tiene:

$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$, entonces

$(x-(-3))^2+(y-(4))^2=(5)^2$ por tanto

$h=3,\ k=4,\ r=5$

2) Si una circunferencia tiene su centro en el punto (-3,4), y un punto P de élla es (-1,2). Escriba su ecuación.

$h=3,\ k=4, x=-1,\ y=2$

$$\left|\overline{CP}\right|=\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}$$

$$r=\sqrt{(-1-(-3))^2+(2-4)^2}$$

$$=\sqrt{4+4}$$

$$=\sqrt{8}\rightarrow r^2=8,\ \text{Por tanto}$$

$$(x-(-3))^2+(y-4)^2=\left(\sqrt{8}\right)^2$$

$$(x+3)^2+(y-4)^2=8$$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

Ecuación general de una circunferencia

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

$$x^2+h^2-2hx+y^2+k^2-2ky=r^2$$

$$x^2+y^2-2hx-2ky+\left(h^2+k^2-r^2\right)=0$$

$$Ax^2+Ay^2+(-2hA)x+(-2kA)y+A\left(h^2+k^2-r^2\right)=A(0)$$

si $-2hA=D$, $-2kA=E$ y $A\left(h^2+k^2-r^2\right)=F$

Se tiene:

$Ax^2+Ay^2+Dx+Ey+F=0\rightarrow$ Ecuación general

Ejemplo: Calcule las coordenadas del centro y la longitud del radio de la siguiente circunferencia.

$4x^2+4y^2+20x-16y+37=0$

Solución:

$$\left(4x^2+20x\right)+\left(4y^2-16y\right)=-37$$

$$4\left(x^2+20x\right)+4\left(y^2-16y\right)=-37$$

$$4\left(x^2+20x+\left(\frac{5}{2}\right)^2-\left(\frac{5}{2}\right)^2\right)+4\left(y^2-16y+\left(\frac{4}{2}\right)^2-\left(\frac{4}{2}\right)^2\right)=-37$$

$$4\left(\left(x^2+20x+\frac{25}{4}\right)-\frac{25}{4}\right)+4\left(\left(y^2-16y+4\right)-4\right)=-37$$

$$4\left(\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-\frac{25}{4}\right)+4\left((y-2)^2-4\right)=-37$$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

$$4\left(x+\frac{5}{2}\right)^2-25+4(y-2)^2-16=-37$$

$$4\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+4(y-2)^2=-37+25+16$$

$$4\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+4(y-2)^2=4$$

$$\left(x+\frac{5}{2}\right)^2+(y-2)^2=1$$

$$h=\frac{-5}{2},\ k=2,\ r=1$$

Ejercicio. Las siguientes ecuaciones ¿Son ecuaciones de una circunferencia?

1) $x^2-8x+y^2+6y+25=0$

2) $x^2+y^2-2x+4y+9=0$

Solución:

1) $(x^2-8x)+(y^2+6y)=-25$

$(x^2-8x+16-16)+(y^2+6y+9-9)=-25$

$(x-4)^2-16+(y+3)^2-9=-25$

$(x-4)^2+(y+3)^2=-25+16+9$

$(x-4)^2+(y+3)^2=0$

R/ La ecuación no es de una circunferencia, representa el punto (4,-3)

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

2) $\left(x^2 - 2x\right) + \left(y^2 + 4y\right) = -9$

$\left(x^2 - 2x + 1 - 1\right) + \left(y^2 + 4y + 4 - 4\right) = -9$

$\left(x-1\right)^2 - 1 + \left(y+2\right)^2 - 4 = -9$

$\left(x-1\right)^2 + \left(y+2\right)^2 = -9 + 1 + 4$

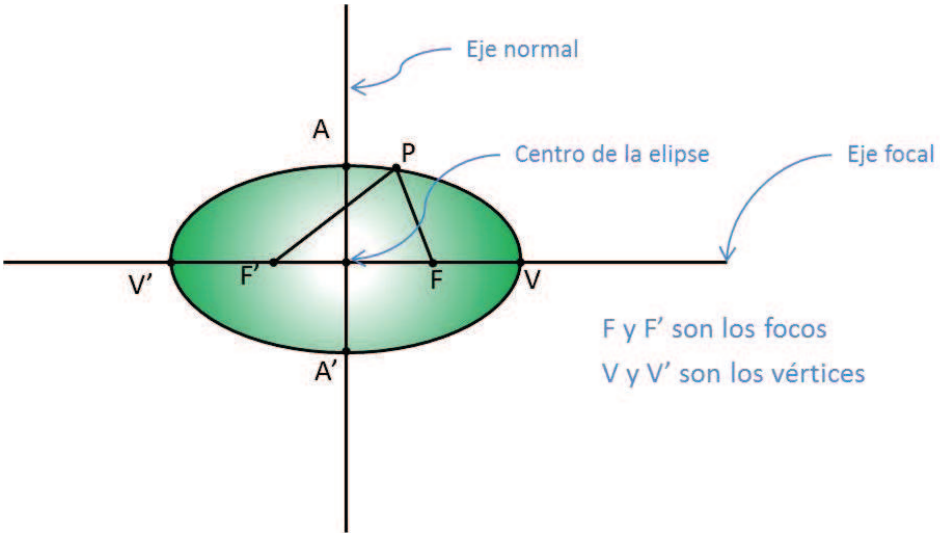
$\left(x-1\right)^2 + \left(y+2\right)^2 = -4$

R/ La ecuación no es una circunferencia (el radio $\sqrt{-4}$ no es real).

LA ELIPSE

"Una elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante mayor que la distancia entre los dos puntos".

Los dos puntos fijos se llaman focos de la elipse. La elipse es simétrica respecto de dos rectas perpendiculares.



Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

$|\overline{FF'}|$: Distancia focal.

$|\overline{VV'}|$: Eje mayor

$|\overline{AA'}|$: Eje menor

$$\text{EXCENTRICIDAD} = \frac{|\overline{FF'}|}{\text{EJE MAYOR}}, \quad E = \frac{|\overline{FF'}|}{|\overline{VV'}|}$$

Como P y V pertenecen a la elipse, se tiene:

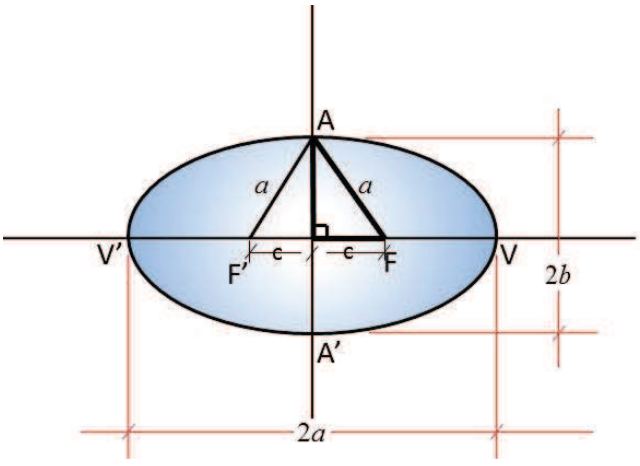
$$|\overline{PF'}| + |\overline{PF}| = |\overline{VF'}| + |\overline{VF}|$$

Por simetría: $|\overline{VF}| + |\overline{V'F'}|$, entonces

$$|\overline{PF'}| + |\overline{PF}| = |\overline{VF'}| + |\overline{V'F'}| = |\overline{VV'}|, \text{ es decir}$$

$$\boxed{|\overline{PF'}| + |\overline{PF}| = \text{EJE MAYOR}}$$

RELACIONES ENTRE EL SEMIEJE MAYOR, EL SEMIEJE MENOR Y LA MITAD DE LA DISTANCIA FOCAL



$|\overline{VV'}| = 2a$

$|\overline{AA'}| = 2b$

$|\overline{FF'}| = 2c$

$a > 0$

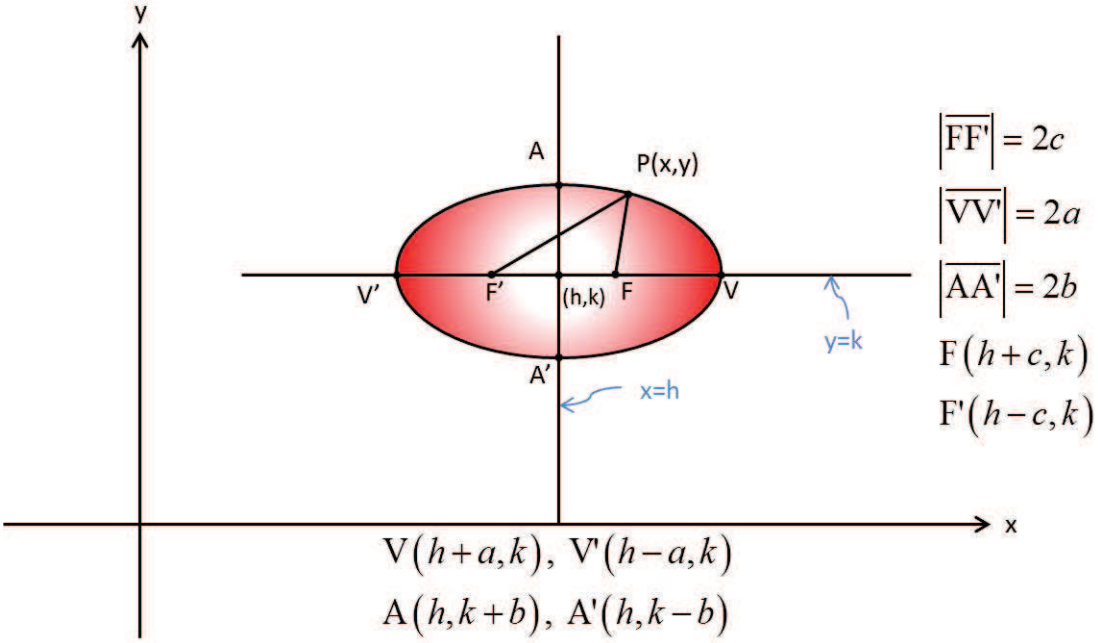
$b > 0$

$c > 0$

Se observa que $\boxed{c^2 + b^2 = a^2}$ ó $c^2 = a^2 - b^2$ ó $b^2 = a^2 - c^2$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN ORDINARIA DE LA ELIPSE



Si P(x,y) pertenece a la elipse, se tiene:

$$|\overline{PF'}| + |\overline{PF}| = |\overline{VV'}|$$

$$\sqrt{(x-(h-c))^2 + (y-k)^2} + \sqrt{(x-(h+c))^2 + (y-k)^2} = 2a$$

$$\sqrt{((x-h)+c)^2 + (y-k)^2} = 2a - \sqrt{((x-h)-c)^2 + (y-k)^2}$$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

$$\left[\sqrt{((x-h)+c)^2+(y-k)^2}\right]^2=\left[2a-\sqrt{((x-h)-c)^2+(y-k)^2}\right]^2$$

$$((x-h)+c)^2+(y-k)^2=4a^2+((x-h)-c)^2+(y-k)^2-4a\sqrt{((x-h)-c)^2+(y-k)^2}$$

$$((x-h)+c)^2-((x-h)-c)^2=4a^2-4a\sqrt{((x-h)-c)^2+(y-k)^2}$$

$$(x-h+c-x+h+c)(x-h+c+x-h-c)=4a^2-4a\sqrt{((x-h)-c)^2+(y-k)^2}$$

$$(2c)(2x-2h)=4a^2-4a\sqrt{((x-h)-c)^2+(y-k)^2}$$

$$4c(x-h)=4a^2-4a\sqrt{((x-h)-c)^2+(y-k)^2}$$

$$c(x-h)=a^2-a\sqrt{((x-h)-c)^2+(y-k)^2}$$

$$a\sqrt{((x-h)-c)^2+(y-k)^2}=a^2-c(x-h)$$

$$\left[a\sqrt{((x-h)-c)^2+(y-k)^2}\right]^2=\left[a^2-c(x-h)\right]^2$$

$$a^2\left[((x-h)-c)^2+(y-k)^2\right]=\left[a^2-c(x-h)\right]^2$$

$$a^2\left((x-h)^2+c^2-2c(x-h)+(y-k)^2\right)=a^4+c^2(x-h)^2-2a^2c(x-h)$$

$$a^2(x-h)^2+a^2c^2-2a^2c(x-h)+a^2(y-k)^2=a^4+c^2(x-h)^2-2a^2c(x-h)$$

$$a^2(x-h)^2-c^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^4-a^2c^2$$

$$(a^2-c^2)(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^2(a^2-c^2),\ \text{pero } a^2-c^2=b^2$$

$$b^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2=a^2b^2$$

$$\frac{b^2(x-h)^2+a^2(y-k)^2}{a^2b^2}=\frac{a^2b^2}{a^2b^2}$$

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2}+\frac{(y-k)^2}{b^2}=1}$$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

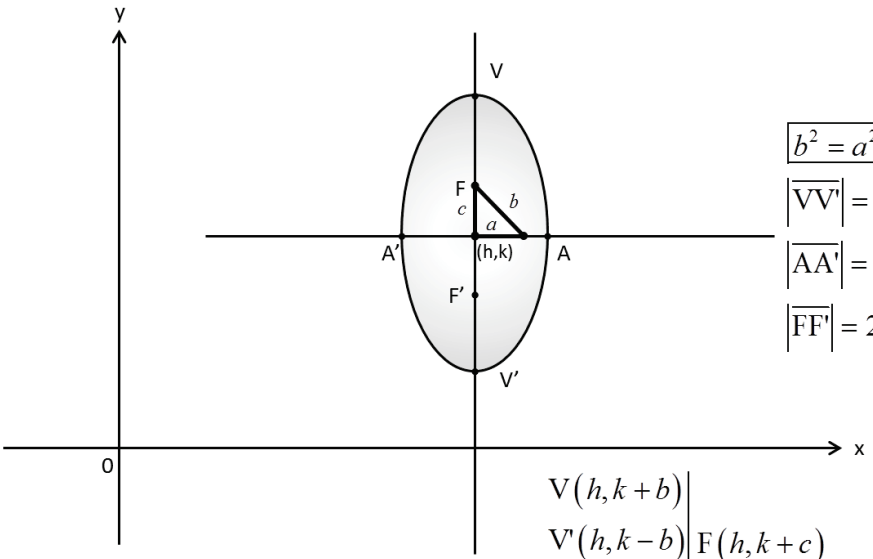
Observaciones:

a) Si $b < a$, en este caso el lugar geométrico es una elipse con eje mayor horizontal.

b) Si $b = a$, entonces $c = 0$. Los focos se confunden con el centro. El lugar geométrico es una circunferencia de radio a y centro:

$(h,k) \rightarrow (x-h)^2 + (y-h)^2 = a^2$

c) Si $b > a$. El lugar geométrico es una elipse con eje mayor vertical.



$$\boxed{b^2 = a^2 + c^2}$$

$$\left|\overline{VV'}\right| = 2b$$

$$\left|\overline{AA'}\right| = 2a$$

$$\left|\overline{FF'}\right| = 2c$$

$$V(h,k+b) \quad V'(h,k-b) \quad A(h+a,k) \quad A'(h-a,k) \quad \Big| \quad F(h,k+c) \quad F'(h,k-c)$$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

Ejemplo: La ecuación $x^2 + 4y^2 - 2x + 16y + 13 = 0$ representa una elipse.

Cálcule las coordenadas centro, focos, vértices. Bosqueje el gráfico.

Solución

$x^2 + 4y^2 - 2x + 16y + 13 = 0$

$(x^2 - 2x) + (4y^2 + 16y) = -13$

$(x^2 - 2x + 1 - 1) + 4(y^2 + 4y + 4 - 4) = -13$

$(x-1)^2 - 1 + 4(y+2)^2 - 4^2 = -13$

$(x-1)^2 + 4(y+2)^2 = -13 + 16 + 1$

$(x-1)^2 + 4(y+2)^2 = 4$

$$\frac{(x-1)^2}{4} + \frac{4(y+2)^2}{1} = 1$$

$a^2 = 4 \rightarrow a = 2,\ b^2 = 1 \rightarrow b = 1;\ a^2 = c^2 + b^2$

$h = 1,\ k = -2$

$c^2 = a^2 - b^2$

$= 4 - 1 = 3$

$= \sqrt{3}$

La ecuación representa a una elipse de eje mayor horizontal $(a > b)$.

$c(h,k) = c(1,-2)$

$F(h+c,k) = F\left(1+\sqrt{3},-2\right)$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

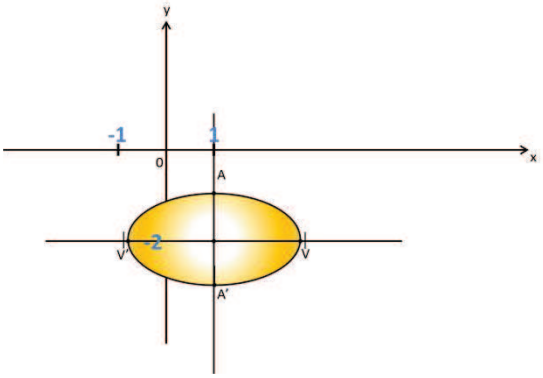
$$F'(h-c,k) = F\left(1-\sqrt{3},-2\right)$$

$$V(h+a,k) = V(1+2,-2) = V(3,-2)$$

$$V'(h-a,k) = V'(1-2,-2) = V'(-1,-2)$$

$$A(h,k+b) = A(1,-2+1) = A(1,-1)$$

$$A'(h,k-b) = A'(1,-2-1) = A'(1,-3)$$



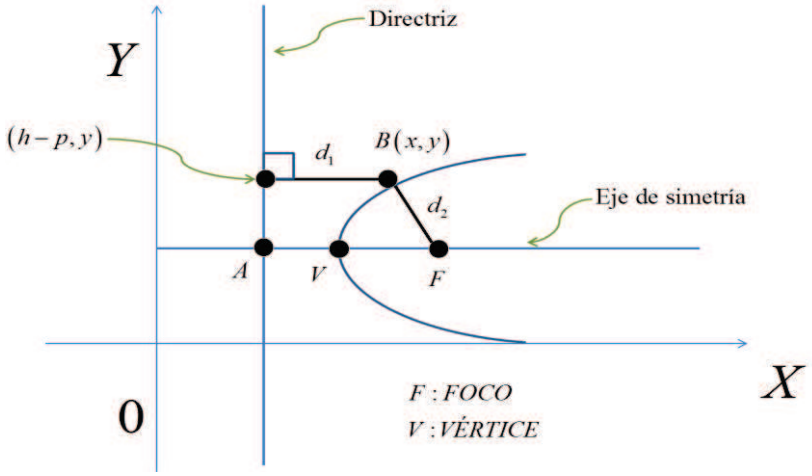
LA PARÁBOLA

"Una parábola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que su distancia de una recta fija, situada en el plano, es igual a su distancia de un punto fijo del plano y que no pertenece a la recta"

La recta fija se llama **DIRECTRIZ** y el punto fijo se llama **FOCO.**

PARÁBOLAS CON EJE DE SIMETRÍA HORIZONTAL.

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013



$\overline{VF}$: PARÁMETRO. El vértice (V) es el punto medio del segmento $\overline{AF}$, $V(h,k)$, $\overline{VF} = p$, $F(h+p,k)$

ECUACIÓN DE LA DIRECTRIZ: $\boxed{x = h - p}$

Sí $B(x,y)$ pertenece a la parábola, se tiene

$d_1 = d_2$

$$x-(h-p)=\sqrt{(x-(h+p))^2+(y-k)^2}$$

$$(x-h)+p=\sqrt{((x-h)-p)^2+(y-k)^2}$$

$$[(x-h)+p]^2=[(x-h)-p]^2+(y-k)^2$$

$$(x-h)^2+p^2+2p(x-h)=(x-h)^2+p^2-2p(x-h)+(y-k)^2$$

$$4p(x-h)=(y-k)^2$$

$$\boxed{(y-k)^2=4p(x-h)}$$

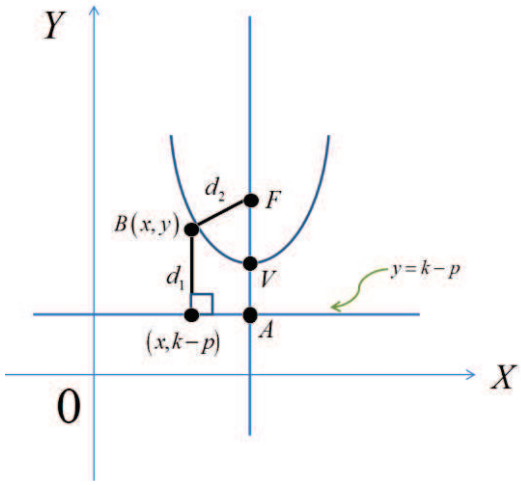
Se observa que:

a) Si $p > 0$, debe ser $x - h \geq 0$, luego $x \geq h$ y la parábola se abre (es cóncava) hacia la derecha.

b) Si $p < 0$, debe ser $x - h \leq 0$, luego $x \leq h$ y la parábola se abre (es cóncava) hacia la izquierda.

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

PARÁBOLAS CON EJE DE SIMETRÍA VERTICAL



$V(h,k)$, $\overline{VF} = p$, $F(h,k+p)$

$d_1 = d_2$

$$y-(k-p)=\sqrt{(x-h)^2+(y-(k+p))^2}$$

$$(y-k)+p=\sqrt{(x-h)^2+[(y-k)-p]^2}$$

$$[(y-k)+p]^2=(x-h)^2+[(y-k)-p]^2$$

$$[(y-k)+p]^2-[(y-k)-p]^2=(x-h)^2$$

$$(y-k+p-(y-k-p))(y-k+p+y-k-p)=(x-h)^2$$

$$(2p)(2y-2k)=(x-h)^2$$

$$4p(y-k)=(x-h)^2$$

$$\boxed{(x-h)^2=4p(y-k)}$$

Si $p>0 \Rightarrow y-k\geq 0 \Rightarrow y\geq k$, por lo tanto la parábola se abre hacia arriba.

Si $p<0 \Rightarrow y-k\leq 0 \Rightarrow y\leq k$, por lo tanto la parábola se abre hacia abajo.

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

Ejemplo: La ecuación $4x + y^2 + 2y + 9 = 0$ representa una parábola. Calcular:

a) Coordenadas de vértice,

b) Coordenadas de foco,

c) La ecuación de la directriz.

Solución

$4x + y^2 + 2y + 9 = 0$

$4x + y^2 + 2y + 1 + 8 = 0$

$y^2 + 2y + 1 = -8 - 4x$

$(y+1)^2 = -4(x+2)$

La ecuación anterior representa una parábola con eje de simetría horizontal.

a) $V(h,k) \equiv V(-2,-1), \quad p = -1$

b) $F(h+p,k) \equiv F(-2+(-1),-1) \equiv F(-3,-1)$

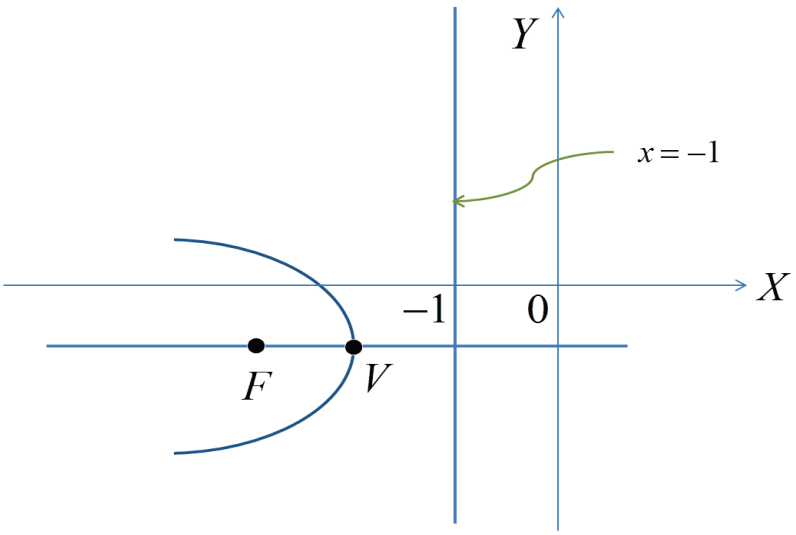
c) ECUACIÓN DE LA DIRECTRIZ

$x = h - p$

$x = -2 - (-1)$

$x = -1$

La parábola se abre hacia la izquierda $(p = -1)$

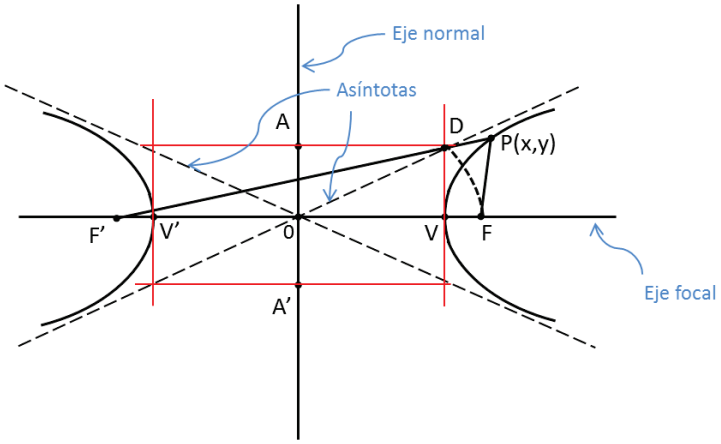


Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

LA HIPÉRBOLA

"Una hipérbola es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencias de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es siempre igual a una cantidad constante, positiva y menor que la distancia entre los focos".

La hipérbola consta de dos ramas simétricas respecto de dos rectas perpendiculares.



F y F' son los focos	
V y V' son los vértices	$\lvert\overline{OD}\rvert = \lvert\overline{OF}\rvert$
$\lvert\overline{FF'}\rvert$: Distancia focal	
$\lvert\overline{VV'}\rvert$: Eje transverso	
$\lvert\overline{AA'}\rvert$: Eje conjugado	

ASINTOTAS DE LA HIPÉRBOLA

Son dos rectas que pasan por el centro tales que a medida que un punto en cualquier rama de la hipérbola se aleja indefinidamente del centro, la distancia de ese punto a una de las rectas decrece continuamente y tiende a cero

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

EXCENTRICIDAD

$$\text{Excentricidad} = \frac{\text{Distancia focal}}{\text{Eje transverso}},\quad E = \frac{|\overline{FF'}|}{|\overline{VV'}|}$$

Como P y V pertenecen a una rama de la hipérbola, se tiene:

$$|\overline{PF'}| - |\overline{PF}| = |\overline{VF'}| - |\overline{VF}|$$

Por simetría $|\overline{VF}| = |\overline{V'F'}|$, entonces

$$|\overline{PF'}| - |\overline{PF}| = |\overline{VF'}| - |\overline{VF}|$$

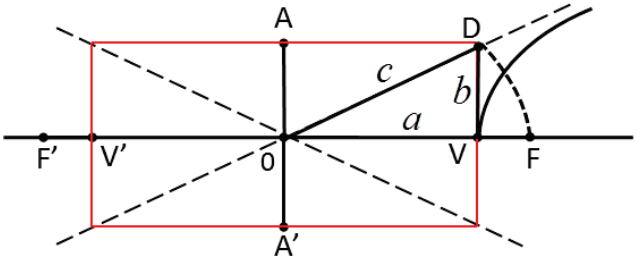
$$|\overline{PF'}| - |\overline{PF}| = |\overline{VV'}| \text{ o sea}$$

$$\boxed{|\overline{PF'}| - |\overline{PF}| = \text{EJE TRANSVERSO}}$$

Si P está en cualquier rama, entonces

$$\big||\overline{PF'}| - |\overline{PF}|\big| = \text{EJE TRANSVERSO}.$$

RELACIÓN ENTRE EL SEMI-EJE TRANSVERSO, EL SEMI-EJE CONJUGADO Y LA MITAD DE LA DISTANCIA FOCAL



$$|\overline{VV'}| = 2a$$

$$|\overline{FF'}| = 2c$$

$$|\overline{AA'}| = 2b$$

$$|\overline{OD}| = |\overline{OF}|$$

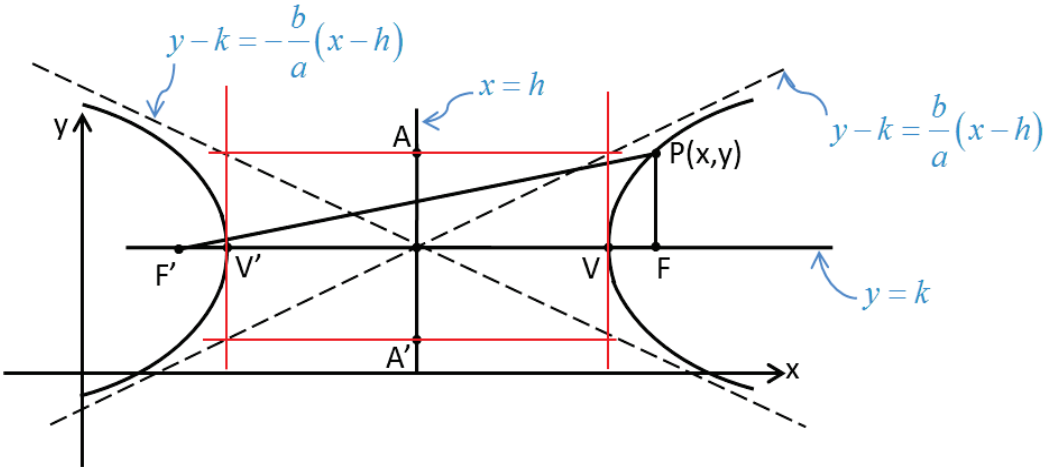
$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$a^2 = c^2 - b^2$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

DEDUCCIÓN DE LA ECUACIÓN ORDINARIA DE UNA HIPÉRBOLA DE EJE TRANSVERSO HORIZONTAL



$$\begin{array}{l|l|l} V(h+a,k) & F(h+c,k) & A(h,k+b) \\ V'(h-a,k) & F'(h-c,k) & A'(h,k-b) \end{array}$$

$$\left|\overline{PF'}\right| - \left|\overline{PF}\right| = \left|\overline{VV'}\right|$$

$$\sqrt{(x-(h-c))^2+(y-k)^2} - \sqrt{(x-(h+c))^2+(y-k)^2} = 2a$$

$$\sqrt{((x-h)+c)^2+(y-k)^2} = 2a + \sqrt{((x-h)-c)^2+(y-k)^2}$$

$$((x-h)+c)^2+(y-k)^2 = 4a^2 + ((x-h)-c)^2+(y-k)^2 + 4a\sqrt{((x-h)-c)^2+(y-k)^2}$$

$$((x-h)+c)^2 - ((x-h)-c)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{((x-h)-c)^2+(y-k)^2}$$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

$$(x-h+c-x+h+c)\left(x-h+c+x-h-c\right)^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{\left((x-h)-c\right)^2+(y-k)^2}$$

$$(2c)(2x-2h) = 4a^2 + 4a\sqrt{\left((x-h)-c\right)^2+(y-k)^2}$$

$$4c(x-h) = 4a^2 + 4a\sqrt{\left((x-h)-c\right)^2+(y-k)^2}$$

$$c(x-h) = a^2 + a\sqrt{\left((x-h)-c\right)^2+(y-k)^2}$$

$$a\sqrt{\left((x-h)-c\right)^2+(y-k)^2} = -a^2 + c(x-h)$$

$$= c(x-h) - a^2$$

$$a^2\left[\left((x-h)-c\right)^2+(y-k)^2\right] = \left[c(x-h)-a^2\right]^2$$

$$a^2\left[(x-h)^2+c^2-2c(x-h)+(y-k)^2\right] = c^2(x-h)^2 + a^4 - 2a^2c(x-h)$$

$$a^2(x-h)^2 - a^2c^2 - 2a^2c(x-h) + a^2(y-k)^2 = c^2(x-h)^2 + a^4 - 2a^2c(x-h)$$

$$a^2(x-h)^2 - c^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^4 - a^2c^2$$

$$\left(a^2-c^2\right)(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2\left(a^2-c^2\right), \text{ pero } a^2-c^2 = -b^2$$

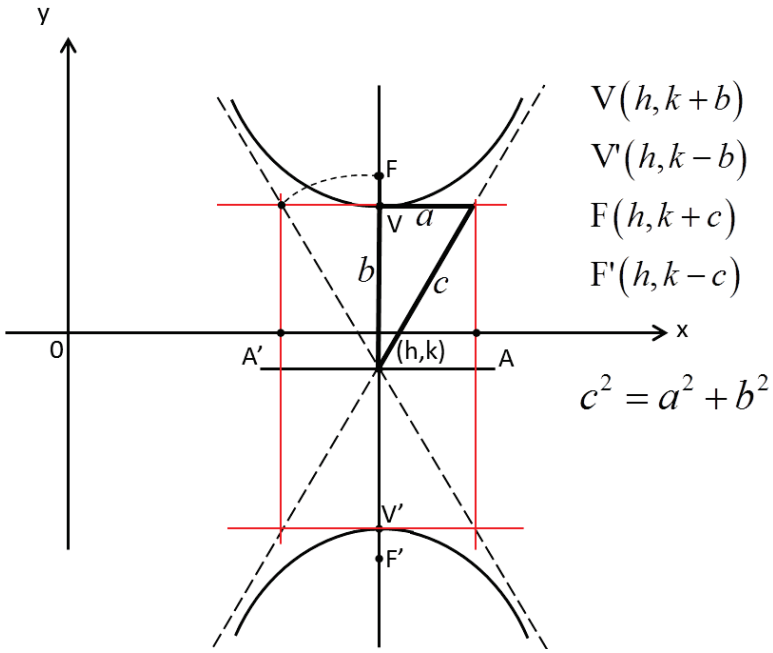
$$-b^2(x-h)^2 + a^2(y-k)^2 = a^2\left(-b^2\right)$$

$$\frac{(y-k)^2}{-b^2} + \frac{(x-h)^2}{a^2} = 1$$

$$\boxed{\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1}$$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

ECUACIÓN ORDINARIA DE LA HIPÉRBOLA DE EJE TRANSVERSO VERTICAL



$$\frac{(y-k)^2}{b^2}-\frac{(x-h)^2}{a^2}=1$$ Se obtiene de igual forma que la ecuación del eje transverso horizontal

Ejemplo. La ecuación $x^2+2x-y^2+6y=4$

Representa una hipérbola. Calcule las coordenadas del vértice, foco y las coordenadas del vértice, foco y las ecuaciones de las asíntotas. Bosqueje su gráfico.

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

Solución:

$x^2 + 2x - y^2 + 6y = 4$

$(x^2 + 2x) - (y^2 - 6y) = 4$

$(x^2 + 2x + 1 - 1) - (y^2 - 6y + 9 - 9) = 4$

$(x+1)^2 - 1 - (y-3)^2 + 9 = 4$

$(x+1)^2 - (y-3)^2 = 4 - 9 + 1$

$(x+1)^2 - (y-3)^2 = -4$

$\frac{(y-3)^2}{4} - \frac{(x+1)^2}{4} = 1$, entonces

$h = -1,\ k = 3,\ a^2 = 4 \rightarrow a = 2,\ b^2 = 4,\ b = 2$

La ecuación de la hipérbola es de eje transverso vertícal

$V(h, k+b) = V(-1, 3+2) = V(-1, 5)$

$V'(h, k-b) = V(-1, 3-2) = V(-1, 1)$

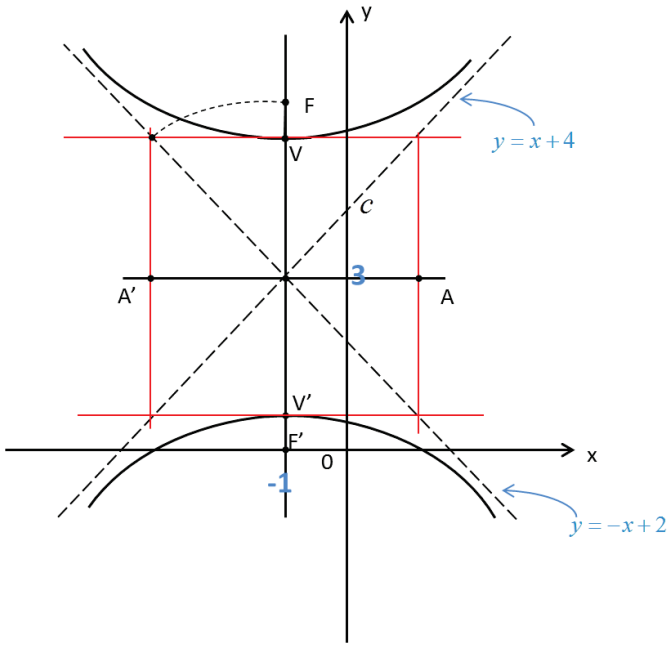
$a^2 + b^2 = c^2 \rightarrow 2^2 + 2^2 = c^2 \Rightarrow c^2 = 8 \rightarrow c = 2\sqrt{2}$

$F(h, k+c) = F(-1, 3+2\sqrt{2})$

$F'(h, k-c) = F(-1, 3-2\sqrt{2})$

$\left.\begin{array}{l} y - 3 = x + 1 \rightarrow y = x + 4 \\ y - 3 = -(x+1) \rightarrow y = -x + 2 \end{array}\right\}$ Ecuaciones de las asíntotas

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013



GEOMETRÍA ANALÍTICA

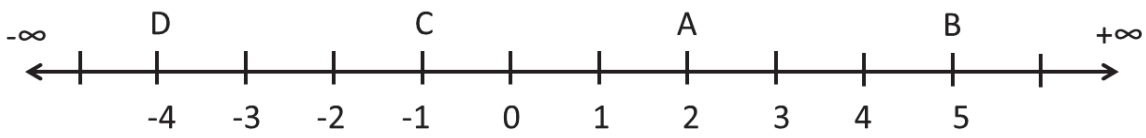
En esta parte de la geometría estudiaremos: la distancia, punto medio de un segmento de recta, la circunferencia, restas en el plano, la parábola, la elipse y la hipérbola.

DISTANCIA ENTRE DOS PUNTOS

$\left|\overline{AB}\right|$: Distancia

$$\left|\overline{AB}\right| = \left|B - A\right| = \left|-(A - B)\right| = \left|-1\right|\left|A - B\right| = \left|A - B\right|$$

Ejemplo: calcule la distancia indicada.



Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

Solución:

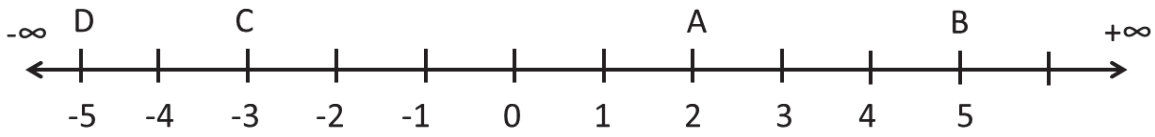
1) $\left|\overline{AB}\right|$
2) $\left|\overline{CA}\right|$
3) $\left|\overline{AD}\right|$
4) $\left|\overline{DB}\right|$

1) $\left|\overline{AB}\right| = |5-2| = |3| = 3$
2) $\left|\overline{CA}\right| = |2-(-1)| = |2+1| = |3| = 3$
3) $\left|\overline{AD}\right| = |-4-2| = |-6| = -(-6) = 6$
4) $\left|\overline{DB}\right| = |5-(-4)| = |5+4| = |9| = 9$

DISTANCIA DIRIGIDA

La distancia dirigida desde A hasta B se define como B-A, y la distancia dirigida desde B hasta A, es A-B.

Ejemplo. Calcule la distancia dirigida indicada.

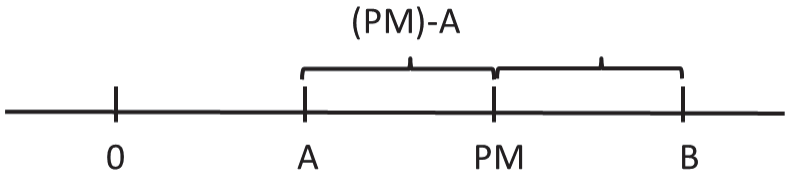


Solución:

1) $\overline{AB}$
2) $\overline{CA}$
3) $\overline{BC}$
4) $\overline{AD}$

1) $\overline{AB} = 5-2 = 3$
2) $\overline{CA} = 2-(-3) = 5$
3) $\overline{BC} = -3-5 = -8$
4) $\overline{AD} = -5-2 = -7$

PUNTO MEDIO DE UN SEGMENTO DE RECTA



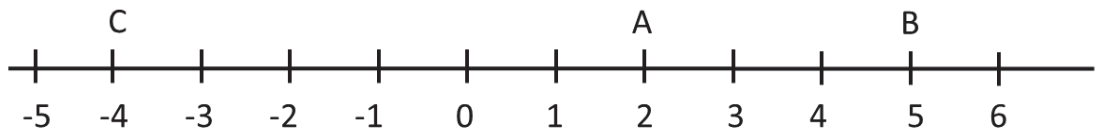
Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

PM: Punto medio, PM(A, B): Punto medio entre A y B.

PM – A = B – PM -------> PM + PM = B +A ------->

2PM = A + B -----> $PM = \frac{A + B}{2}$

Ejemplo: calcule el valor del punto medio.



1) PM (A,B) 2) PM(C,A) 3) PM (C,B)

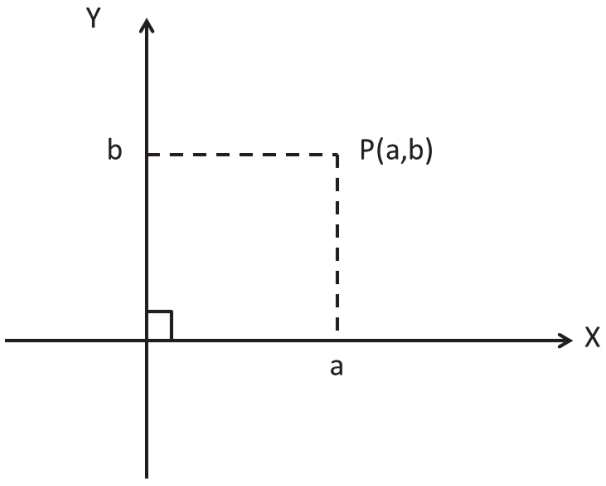
Solución

$1)\ PM = \frac{A + B}{2} = \frac{2 + 6}{2} = 4$

$2)\ PM = \frac{C + A}{2} = \frac{-4 + 2}{2} = -1$

$3)\ PM = \frac{C + B}{2} = \frac{-4 + 6}{2} = 1$

PLANO CARTESIANO



Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

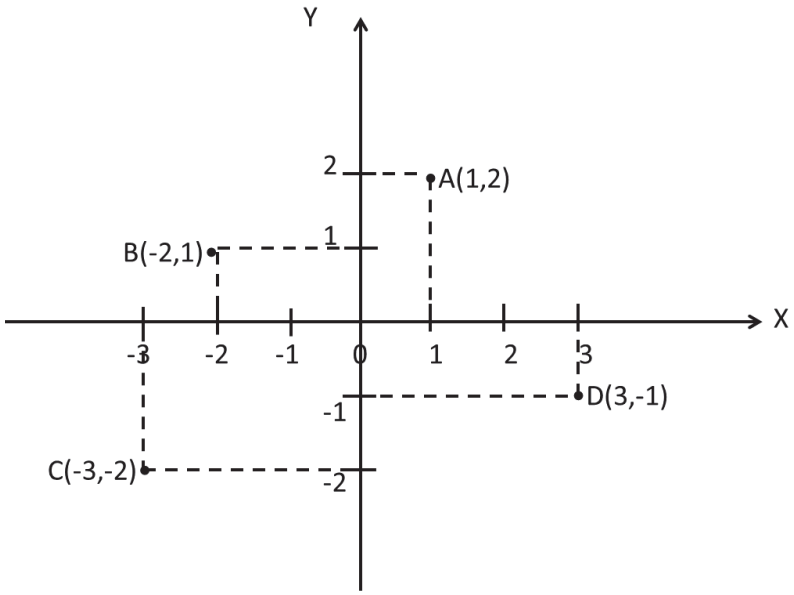
(a ,b) : Par ordenado

a: Distancia dirigida desde el eje "Y" al punto P, se llama abscisa.

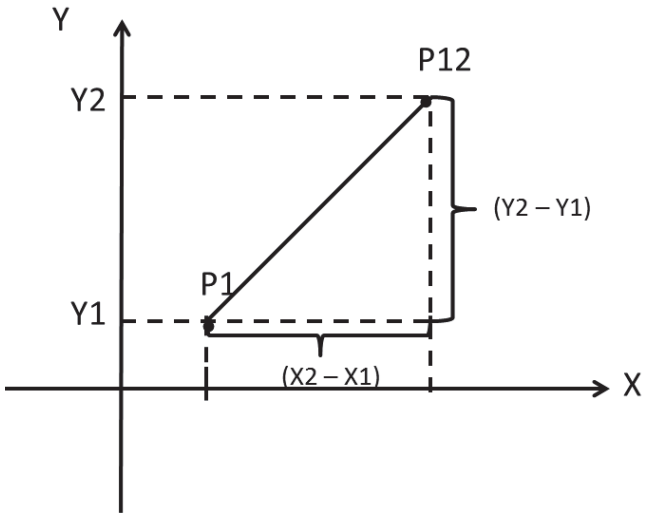
B: Distancia dirigida desde el eje "X" al punto P, se llama ordenada.

Ejemplo: Ubique en el plano cartesiano los puntos A(1,2), B(-2,1), C(-3,-2), D(3,-1)

Solución



FORMULA DE LA DISTANCIA



Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

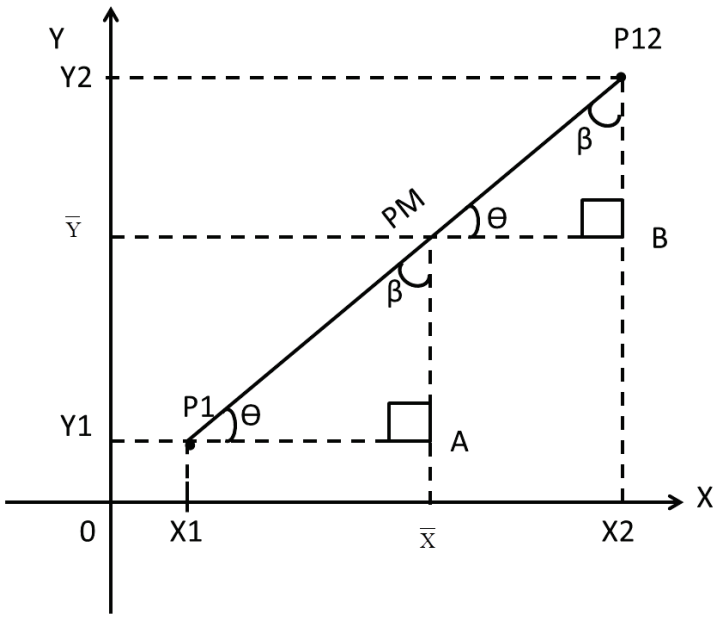
$$\left(\left|\overline{P_1P_2}\right|\right)^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 \rightarrow \text{Teorema de pitágoras}$$

$$\left(\left|\overline{P_1P_2}\right|\right)^2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Ejemplo: Calcule el valor de X para que la distancia entre P_1 (x, 3) y P_2 (2,-1) sea 5.

$$\left(\left|\overline{P_1P_2}\right|\right)^2 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$
$$5 = \sqrt{(x-2)^2 + (3-(-1))^2}$$
$$5 = \sqrt{(x-2)^2 + 16}$$
$$25 = (x-2)^2 + 16$$
$$25\text{-}16 = (x-2)^2$$
$$9 = (x-2)^2$$
$$9 = (x-2)^2$$
$$(x-2)^2 - 9 = 0$$
$$[(x-2)-3][(x-2)+3] = 0$$
$$[x-5][x+1] = 0$$
$$x - 5 = 0 \rightarrow \quad x = 5$$
$$x + 1 = 0 \rightarrow \quad x = -1$$
$$R/x = 5 \text{ ó } x = -1$$

PUNTO MEDIO



Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

$\Delta P_1 A(PM) = \Delta(PM)BP_2$

$\left|\overline{P_1(PM)}\right| = \left|\overline{(PM)P_2}\right|$

$\bar{x} - x_1 = x_2 - \bar{x}$

$2\bar{x} = x_1 + x_2$

$\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$

$y_2 - \bar{y} = \bar{y} - y_1$

$2\bar{y} = y_1 + y_2$

$\bar{y} = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

$(\bar{x}, \bar{y}) = \left(\dfrac{x_1 + x_2}{2}, \dfrac{y_1 + y_2}{2}\right)$

Ejemplo: Calcular las coordenadas del punto medio del segmento que une los puntos A (-5,-3) y B(9,3)

$\bar{x} = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$ $\qquad$ $\bar{y} = \dfrac{y_1 + y_2}{2}$

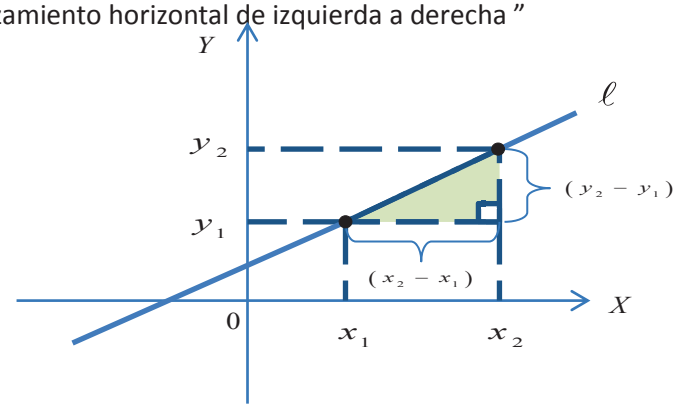
$\bar{x} = \dfrac{-5 + 9}{2}$ $\qquad$ $\bar{y} = \dfrac{-3 + 3}{2}$ $\qquad$ $(\bar{x}, \bar{y}) = (2, 0)$

$\bar{x} = 2$ $\qquad$ $\bar{y} = 0$

RECTAS EN EL PLANO

PEDIENTE DE UNA RECTA

"La pendiente de una recta no vertical, mide el número de unidades que la recta asciende (o desciende) verticalmente por cada unidad de desplazamiento horizontal de izquierda a derecha "

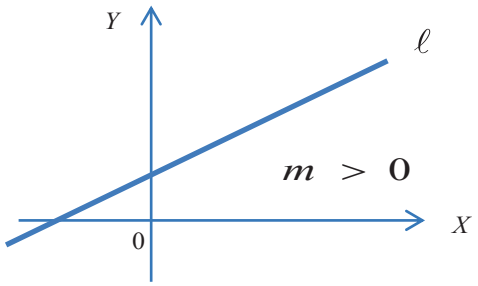


Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

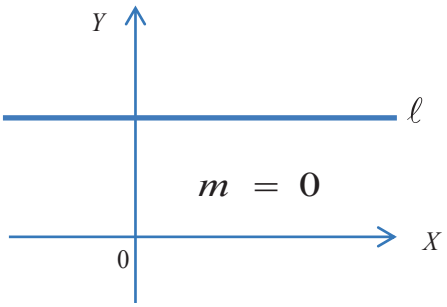
m : Pendiente $\rightarrow$ $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

Ejemplo

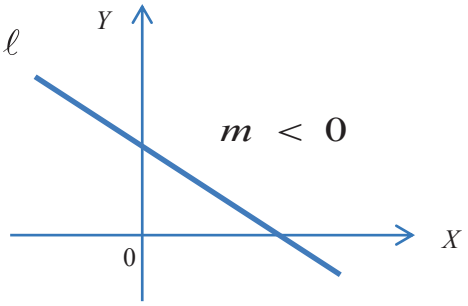
1)



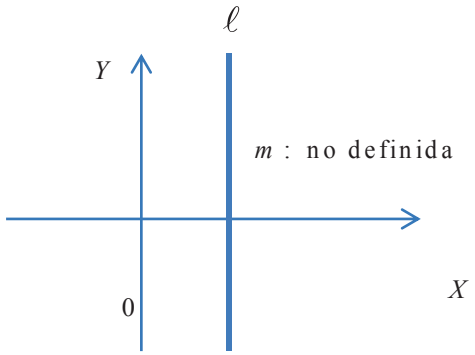
2)



3)



4)



$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{-(y_1 - y_2)}{-(x_1 - x_2)}$$

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

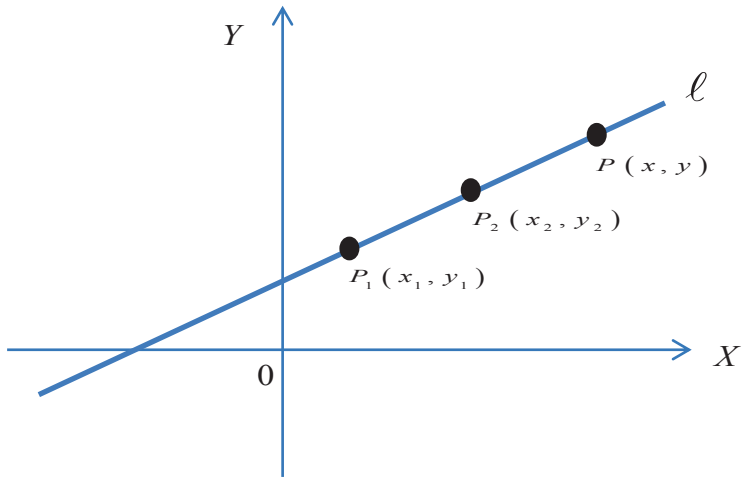
Ejercicio. Calcule el valor de la pendiente de la recta que pasa por $P_1(2,4)$ y $P_2(-2,6)$

Solución

$$m = \frac{4-6}{2-(-2)} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

ECUACIONES DE RECTAS



$P(x,y)$: Punto cualquiera que pertenece a la recta ℓ

$P_1(x_1,y_1)$ $P_2(x_2,y_2)$: Punto que pertenece a la recta ℓ, cuyas coordenadas se conocen .

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad , \quad m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

$$m = (x - x_1) = y - y_1 \quad \Rightarrow$$

$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$ Ecuación PUNTO-PENDIENTE.

$$y = mx - mx_1 + y_1$$

$y = mx + (y_1 - mx_1)$, Sí $y_1 - mx_1 = b$ Se tiene:

$\boxed{y = mx + b}$ ECUACIÓN PENDIENTE-INTERSECCIÓN

Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

$y = mx + b$

$y - mx - b = 0$, Sí $B \neq 0$

$By - Bmx - Bb = B(0)$

$By + (-Bm)x + (-Bb) = 0$, Sí $-Bm = A$ y $-Bb = C$

Se tiene:

$By + Ax + C = 0 \Rightarrow \boxed{Ax + By + C = 0}$ ECUACIÓN GENERAL

En $By + Ax + C = 0$

Sí $A = 0 \rightarrow By + C = 0 \rightarrow y = -\frac{C}{B}$ y Sí $-\frac{C}{B} = k$ se tiene

$\boxed{y = k}$ ECUACIÓN RECTA HORIZONTAL

Sí $B = 0 \rightarrow Ax + C = 0 \rightarrow x = -\frac{C}{A}$ y Sí $-\frac{C}{A} = a$ se tiene

$\boxed{x = a}$ ECUACIÓN RECTA VERTICAL

Ejercicio: Dibuje las gráficas de la siguientes rectas:

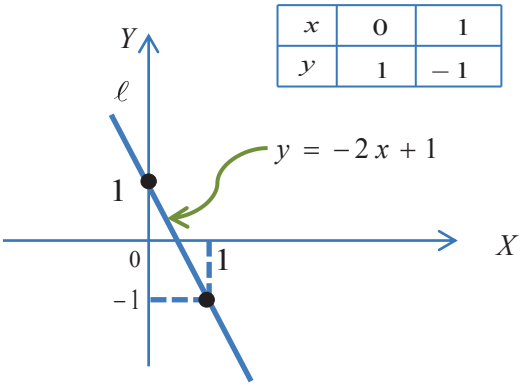
1) $y = -2x + 1$, 2) $y = -2$, 3) $x = 4$, 4) $3y + x - 6 = 0$,

Solución

¿Cuántos puntos (mínimos) se necesitan para graficar una recta?

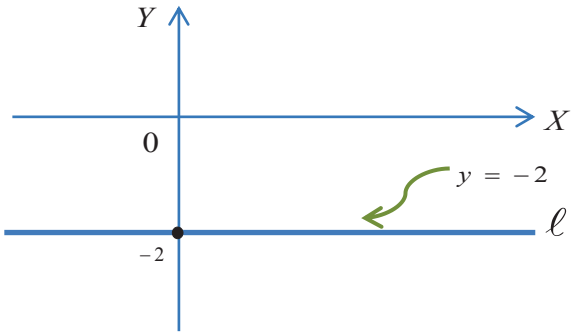
1) $y = -2x + 1$

x	0	1
y	1	-1

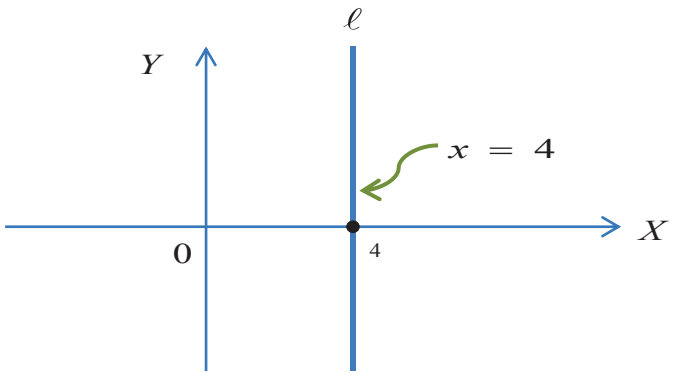


Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013

2) $y = -2$. Para cualquier valor de x, y siempre vale -2

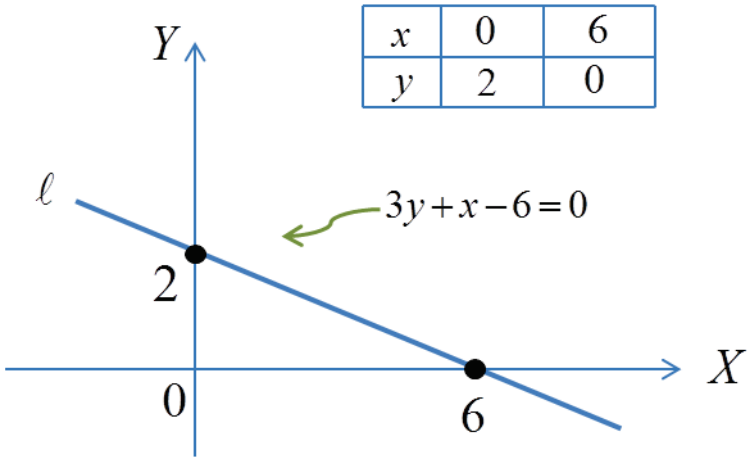


3) $x = 4$. Para cualquier valor de y, x siempre vale 4



4) $3y + x - 6 = 0$

x	0	6
y	2	0



Universidad de El Salvador, Derechos Reservados 2013